

# POSITIVITÉ DES EXPOSANTS DE LYAPOUNOV POUR UN OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER CONTINU À VALEURS MATRICIELLES

HAKIM BOUMAZA

**RÉSUMÉ.** Dans cette note, nous étudions un modèle de type Anderson, continu et à valeurs matricielles. Nous prouvons la stricte positivité des deux plus grands exposants de Lyapounov associés à ce modèle, ainsi que leur séparation, et ce pour toutes les énergies dans  $(2, +\infty)$  en dehors d'un ensemble discret de valeurs. Cela conduit à l'absence de spectre absolument continu dans  $(2, +\infty)$ . Les méthodes, utilisant des résultats de théorie des groupes dus à Breuillard et Gelfand, s'appliquent au cas singulier des distributions de Bernoulli.

## Abstract

### Positivity of Lyapounov exponents for a continuous matrix-valued Schrödinger operator

In this note, we study a continuous matrix-valued Anderson-type model. Both leading Lyapounov exponents of this model are proved to be positive and distinct for all energies in  $(2, +\infty)$  except those in a discrete set, which leads to absence of absolutely continuous spectrum in  $(2, +\infty)$ . The methods, using group theory results by Breuillard and Gelfand, allow for singular Bernoulli distributions.

## ABRIDGED ENGLISH VERSION

Localization for Anderson models in dimension  $d \geq 2$  is still an open problem if one looks for arbitrary disorder, especially for Bernoulli randomness. A possible approach to try to understand localization for  $d = 2$  is to discretize one direction. It leads to consider one-dimensional continuous Schrödinger operators, no longer scalar-valued, but now matrix-valued. What is already well understood is the case of dimension one scalar-valued continuous Schrödinger operators with arbitrary randomness including Bernoulli distributions (see [5]) and discrete matrix-valued Schrödinger operators also including the Bernoulli case (see [6] and [8]). We aim at combining existing techniques for these cases to prove that for our model (1), the Lyapunov exponents are all positive and distinct for all energies except those in a discrete set, at least if the energy is in  $(2, +\infty)$  (see Theorem 2.1). Due to Kotani's theory (see [9]) this result will imply the absence of absolutely continuous spectrum in the interval  $(2, +\infty)$ . To be applied, the results of [9] need to be combined with the suspension method described by Kirsch in [7], as the operator we are studying here is not  $\mathbb{R}$ -ergodic but  $\mathbb{Z}$ -ergodic. Our result is a modest first step before being able to prove the same kind of results for potentials of arbitrary dimension, not only  $2 \times 2$  matrices. But it is already interesting as, up to our knowledge, it is the first application of the work of Breuillard and Gelfand on generating dense Lie subgroups in semisimple groups to a problem of separability of Lyapunov exponents.

It also completes a first result of absence of absolutely continuous spectrum proved in [2]. Indeed, in [2] we only get positivity of Lyapunov exponents away from a countable set, which is enough to apply Kotani's theory but not enough to follow a multiscale analysis scheme to prove localization for our model (see [11]). The present result will allow this.

In this Note, we begin by defining our model (1), then we state precisely our result of positivity of Lyapunov exponents and absence of absolutely continuous spectrum for this model (Theorem 2.1). Then we sketch the proof of this theorem. First we recall an algebraic criterion by Gol'dsheid and Margulis (see [6]) which says that the Lyapunov exponents are all distinct and positive whenever the group  $G_\mu(E)$  introduced at the section 3.1 is Zariski-dense in the symplectic group  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . To prove Zariski-density we then follow a result of Breuillard and Gelander [3] (Theorem 3.2) on how to generate dense Lie subgroups of semisimple groups. To verify the assumptions of Theorem 3.2, we first use simultaneous diophantine approximation to prove Proposition 3.3. It is at this step that we have to restrict the values taken by the energy to the interval  $(2, +\infty)$ . Then we compute the logarithms of the elements of  $\mathcal{O}$  (see Proposition 3.2) given by Proposition 3.3 and we prove that they generate the whole Lie algebra  $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ , at least for energies not in a discrete set in  $(2, +\infty)$ . To do this we construct directly a family of 10 linearly independent matrices in the Lie algebra generated by the logarithms. As  $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$  is of dimension 10, this Lie algebra is in fact equal to  $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$  and we have satisfied the second assumption of Theorem 3.2, which proves Theorem 2.1.

## 1. INTRODUCTION

La question de la localisation reste un problème ouvert pour les modèles d'Anderson continus en dimension  $d \geq 2$ . Un moyen d'approcher de tels modèles en dimension 2 est de procéder à une discrétisation dans une direction, ce qui conduit à considérer des modèles d'Anderson continus à valeurs matricielles comme c'est le cas dans la présente note. Dans un premier article (voir [2]), nous avons déjà étudié un tel modèle : nous avons prouvé l'absence de spectre absolument continu pour des énergies suffisamment grandes pour le modèle (1). Pour cela nous avons établi la stricte positivité des exposants de Lyapounov pour toute énergie hors d'un ensemble dénombrable. Ce résultat suffit pour prouver l'absence de spectre absolument continu, mais il ne permet pas ensuite d'étudier la régularité des exposants de Lyapounov et de la densité d'états intégrée. Or cette étape est essentielle en vue d'appliquer un schéma d'analyse multi-échelle pour prouver la localisation pour le modèle (1) (voir [11]).

Pour étudier la régularité de la densité d'états intégrée, il nous faut prouver que les exposants de Lyapounov associés au modèle (1) sont deux à deux distincts et strictement positifs sur un intervalle, donc hors d'un ensemble *discret* d'énergies. Pour arriver à un tel résultat, les techniques algébriques utilisées dans [2] se révèlent insuffisantes. Nous les complétons en utilisant un résultat dû à Breuillard et Gelander (voir [3]) de densité de sous-groupes de groupes de Lie semi-simples.

L'intérêt de ces techniques réside aussi dans le fait qu'elles prennent en compte le cas limite des modèles d'Anderson continus où l'aléa apparaît sous sa forme la plus faible, celle de variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli. Jusque là, seuls les cas d'opérateurs à valeurs scalaires (voir [5]) et d'opérateurs discrets à valeurs

matricielles (voir [6, 8]) avaient conduit à des preuves permettant de prendre en compte ce type d'aléa.

## 2. LES RÉSULTATS

Le modèle que nous étudions dans la présente Note est défini par l'opérateur suivant :

$$(1) \quad H_\omega^A = -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} \chi_{[0,1]}(x-n) & 0 \\ 0 & \omega_2^{(n)} \chi_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix}$$

agissant dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ . Dans l'expression ci-dessus,  $\chi_{[0,1]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 1]$ , et  $(\omega_1^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(\omega_2^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  sont deux suites indépendantes de variables aléatoires i.i.d. de distribution de probabilité commune  $\nu$  telle que  $\{0, 1\} \subset \text{supp } \nu$ .

Cet opérateur est une perturbation bornée de l'opérateur  $(-\frac{d^2}{dx^2}) \oplus (-\frac{d^2}{dx^2})$ . Il est donc autoadjoint dans l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ .

Pour tout nombre réel  $E$ , on associe au système différentiel  $H_\omega^A u = Eu$  la suite des matrices de transfert  $(A_{n,2}^\omega)_{n \in \mathbb{Z}}$  définie par les relations :

$${}^t(u_1(n+1), u_2(n+1), u_1'(n+1), u_2'(n+1)) = A_{n,2}^\omega(E) \cdot {}^t(u_1(n), u_2(n), u_1'(n), u_2'(n))$$

où  $u = (u_1, u_2)$  est une solution du système différentiel  $H_\omega^A u = Eu$ . Les matrices  $A_{n,2}^\omega(E)$  appartiennent au groupe symplectique  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Leurs exposants de Lyapounov,  $\gamma_1(E), \dots, \gamma_4(E)$ , ont alors les propriétés de symétrie suivantes :  $\gamma_1 = -\gamma_4$  et  $\gamma_2 = -\gamma_3$ .

Pour plus de précisions sur les exposants de Lyapounov dans le cas symplectique, on renvoie au chapitre 4 de [1]. On est ainsi ramené à n'étudier que les deux premiers exposants de Lyapounov. Pour cet opérateur  $H_\omega^A$ , nous allons montrer le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Il existe un ensemble discret  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $E \in (2, +\infty)$ ,  $E \notin \mathcal{S}$ , on ait*

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0.$$

*En particulier,  $H_\omega^A$  n'a pas de spectre absolument continu dans l'intervalle  $(2, +\infty)$ .*

Ce théorème améliore substantiellement le résultat déjà obtenu dans [2] dans la mesure où il nous permet d'obtenir l'existence d'intervalles ouverts sur lesquels la propriété  $\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0$  est vraie. Cela est essentiel pour pouvoir s'inspirer des techniques mises en place dans [4], puis détaillées dans [5] pour des opérateurs à valeurs scalaires et non matricielles. On pourra ainsi prouver un résultat de régularité pour la densité d'états intégrée associée à l'opérateur  $H_\omega^A$ . Un tel résultat fera l'objet d'une publication ultérieure de l'auteur.

## 3. PRINCIPE DE LA PREUVE

Nous présentons ici les principales idées de la preuve du théorème 2.1.

### 3.1. Un critère algébrique de séparation des exposants de Lyapounov.

Tout d'abord on introduit pour tout  $E$ , à partir de la mesure  $\nu$ , une mesure  $\mu_E$  sur le groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Pour  $\Gamma$  borélien de  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$  on pose :  $\mu_E(\Gamma) = \nu(\{\omega \mid A_{0,2}^\omega(E) \in \Gamma\})$ . Cette mesure  $\mu_E$  est définie seulement à partir de  $A_{0,2}^\omega(E)$  puisque les matrices  $A_{n,2}^\omega(E)$  sont supposées i.i.d. On peut alors introduire le sous-groupe  $G_\mu(E)$  de  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$  engendré par le support de la mesure  $\mu_E$ . Ce n'est autre que le sous-groupe engendré par les quatre matrices  $A_{0,2}^{(0,0)}(E)$ ,  $A_{0,2}^{(1,0)}(E)$ ,  $A_{0,2}^{(0,1)}(E)$ ,  $A_{0,2}^{(1,1)}(E)$  correspondant aux valeurs 0 ou 1 prises par  $\omega_1^{(0)}$  et  $\omega_2^{(0)}$ .

Le critère essentiel de séparation des exposants de Lyapounov est le suivant :

**Théorème 3.1** (Gol'dsheid et Margulis [6]). *Si le sous-groupe  $G_\mu(E)$  est Zariski-dense dans  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ , alors :  $\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0$ .*

Ce critère est utilisé dans [2] où nous n'étions parvenus à l'appliquer que pour un ensemble de valeurs de  $E$  hors d'un ensemble dénombrable. Pour pallier cette insuffisance, il nous manquait le résultat suivant qui permet de systématiser la preuve de Zariski-densité de  $G_\mu(E)$  :

**Théorème 3.2** (Breuillard et Gelander [3]). *Soit  $G$  un groupe de Lie réel connexe semi-simple d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il existe alors un voisinage de l'identité  $\mathcal{O} \subset G$ , sur lequel  $\log = \exp^{-1}$  est un difféomorphisme bien défini, et tel que  $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}$  engendrent un sous-groupe dense de  $G$  si et seulement si  $\log(g_1), \dots, \log(g_m)$  engendrent  $\mathfrak{g}$ .*

Ce critère nous donne le plan de la suite de la preuve. Tout d'abord nous allons vérifier que l'on peut construire à partir des matrices  $A_{0,2}^{(0,0)}(E)$ ,  $A_{0,2}^{(1,0)}(E)$ ,  $A_{0,2}^{(0,1)}(E)$ ,  $A_{0,2}^{(1,1)}(E)$ , quatre autres matrices qui sont dans  $\mathcal{O}$ . On calcule ensuite leurs logarithmes et on vérifie que ceux-ci engendrent l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$  du groupe  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ .

### 3.2. Eléments proches de l'identité dans $G_\mu(E)$ .

**Proposition 3.3.** *Soit  $E \in (2, +\infty)$ . Pour tout  $\omega \in \{0, 1\}^2$ , il existe un entier  $m_\omega(E) \geq 1$  tel que*

$$(A_{0,2}^\omega(E))^{m_\omega(E)} \in \mathcal{O}.$$

On commence par préciser l'expression des matrices de transfert. On pose :

$$M_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} & 1 \\ 1 & \omega_2^{(0)} \end{pmatrix} = S_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{\omega^{(0)}} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\omega^{(0)}} \end{pmatrix} S_{\omega^{(0)}}^{-1},$$

où  $S_{\omega^{(0)}}$  est orthogonale et où les nombres réels  $\lambda_1^{\omega^{(0)}} \leq \lambda_2^{\omega^{(0)}}$  sont les valeurs propres de  $M_{\omega^{(0)}}$ . On peut calculer explicitement toutes ces quantités. Si  $E > 2$ , alors  $E$  est plus grand que toute valeur propre de  $M_{\omega^{(0)}}$ , et on obtient l'expression suivante, où l'on note  $r_i = r_i(E, \omega^{(0)}) := \sqrt{E - \lambda_i^{\omega^{(0)}}}$  pour  $i = 1, 2$  :

(2)

$$A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E) = \begin{pmatrix} S_{\omega^{(0)}} & 0 \\ 0 & S_{\omega^{(0)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r_1 & 0 & \frac{1}{r_1} \sin r_1 & 0 \\ 0 & \cos r_2 & 0 & \frac{1}{r_2} \sin r_2 \\ -r_1 \sin r_1 & 0 & \cos r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \sin r_2 & 0 & \cos r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{\omega^{(0)}}^{-1} & 0 \\ 0 & S_{\omega^{(0)}}^{-1} \end{pmatrix}$$

On fixe  $E \in (2, +\infty)$  et  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \{0, 1\}^2$ . Soit  $M$  un nombre réel  $> 1$ . Par approximation diophantienne simultanée (voir [10]), on voit qu'il existe  $m_\omega(E) \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq m_\omega(E) \leq M$  et  $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$  tels que :

$$|r_1 m_\omega(E) - 2x_1 \pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |r_2 m_\omega(E) - 2x_2 \pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{2}}.$$

En prenant alors  $M$  assez grand pour que la boule de centre l'identité et de rayon  $2\pi M^{-\frac{1}{2}}$  soit contenue dans  $\mathcal{O}$ , on en déduit que  $(A_{0,2}^\omega(E))^{m_\omega(E)} \in \mathcal{O}$ . On a obtenu les éléments voulus de  $G_\mu(E)$  qui sont dans  $\mathcal{O}$ . Il est très important pour la suite de préciser que l'on peut fixer  $M$  indépendant de  $E$  et de  $\omega$ .  $\square$

### 3.3. L'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ .

**Proposition 3.4.** *Les logarithmes des matrices  $(A_{0,2}^\omega(E))^{m_\omega(E)}$  engendrent l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$  pour tous les  $E \in (2, +\infty)$  hors d'un ensemble discret  $\mathcal{S}$ .*

Tout d'abord, on a l'expression suivante pour  $LA^\omega := \log((A_{0,2}^\omega(E))^{m_\omega(E)})$  :

$$(3) \quad LA^\omega = \begin{pmatrix} S_{\omega(0)} & 0 \\ 0 & S_{\omega(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_2}{r_2} \\ m_\omega(E)r_1^2 + 2\pi r_1 x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_\omega(E)r_2^2 + 2\pi r_2 x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{\omega(0)}^{-1} & 0 \\ 0 & S_{\omega(0)}^{-1} \end{pmatrix}$$

où les  $x_i = x_i^\omega(E) := \frac{1}{2} \mathbb{E}(\frac{m_\omega(E)r_i}{\pi} + \frac{1}{2})$ , pour  $i = 1, 2$ , sont comme dans la preuve de la proposition 3.3. On note  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$  la sous-algèbre de Lie engendrée par les quatre logarithmes  $LA^\omega$ . On commence par prouver que les 4 crochets de Lie  $[LA^{(1,0)}, LA^{(0,0)}]$ ,  $[LA^{(0,1)}, LA^{(0,0)}]$ ,  $[LA^{(1,0)}, LA^{(1,1)}]$  et  $[LA^{(0,1)}, LA^{(1,1)}]$  forment une famille libre dans l'espace  $V_1$  de dimension 4 suivant :

$$V_1 := \{Z = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t A \end{pmatrix} \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} \subset \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}),$$

et ce pour tout  $E$  hors d'un ensemble discret  $\mathcal{S}_1$ . En effet, on peut calculer le déterminant formé des 4 vecteurs colonnes représentant les coefficients des blocs supérieurs gauches  $2 \times 2$  des 4 crochets de Lie. Ce déterminant est une fonction  $d(E, m_\omega(E), x_i^\omega(E))$ . Elle n'est pas directement analytique car les  $m_\omega(E)$  et les  $x_i^\omega(E)$  ne le sont pas a priori. Mais, si l'on fixe un intervalle borné  $I$  (ouvert ou fermé) contenu dans  $(2, +\infty)$ , et un nombre  $M$  comme dans la preuve de la proposition 3.3, les entiers  $m_\omega(E)$  et  $x_i^\omega(E)$  ne prennent qu'un nombre fini de valeurs lorsque  $E$  parcourt  $I$ . Or, si on fixe ces entiers, on obtient bien une fonction analytique de  $E$ . Ainsi, l'ensemble

$$\mathcal{S}_I = \{E \in I \mid d(E, m_\omega(E), x_i^\omega(E)) = 0\} = \bigcup_{p, k_i} \{E \in I \mid d(E, p, k_i) = 0\}$$

est discret comme réunion finie d'ensembles discrets. Comme cela vaut pour tout sous-intervalle borné de  $(2, +\infty)$ , on en déduit que l'ensemble  $\mathcal{S}_1$  des  $E \in (2, +\infty)$  tels que  $d(E, m_\omega(E), x_i^\omega(E)) = 0$  est discret.

Si on fixe  $E \in (2, +\infty)$ ,  $E \notin \mathcal{S}_1$ , on peut utiliser le fait qu'alors  $V_1 \subset \mathcal{A}$  pour dire que les matrices  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  correspondant à  $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$  et  $(1, 1, 1, 1)$  sont aussi dans  $\mathcal{A}$ . On prouve alors, comme précédemment, que  $LA^{(1,0)} - LA^{(0,0)}$ ,  $LA^{(1,0)} - LA^{(1,1)}$ ,  $LA^{(0,1)} - LA^{(0,0)}$ ,  $[LA^{(1,0)} - LA^{(0,0)}, Z_1]$ ,  $[LA^{(1,0)} - LA^{(1,1)}, Z_2]$  et  $[LA^{(0,1)} - LA^{(0,0)}, Z_3]$  forment une famille libre de 6 éléments dans l'espace  $V_2$  de dimension 6 suivant :

$$V_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \mid B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ symétriques} \right\} \subset \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}),$$

et ce pour tout  $E$  hors d'un ensemble discret  $\mathcal{S}_2$ .

On pose  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ . Comme  $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$ , on vient donc d'exhiber, pour tout  $E \in (2, +\infty) \setminus \mathcal{S}$ , une famille libre de 10 matrices dans  $\mathcal{A}$ . Comme  $\dim \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) = 10$  et que  $\mathcal{A}$  en est un sous-espace, cela prouve l'égalité  $\mathcal{A} = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$  pour ces valeurs de  $E$ . Ainsi, pour tout  $E \in (2, +\infty)$ ,  $E \notin \mathcal{S}$  les matrices  $LA^\omega$  engendrent l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ .  $\square$

**3.4. Fin de la preuve du théorème 2.1.** On peut appliquer le théorème 3.2 pour  $E \in (2, +\infty) \setminus \mathcal{S}$ . Les matrices  $((A_{0,2}^\omega(E))^{m_\omega(E)})$  engendrent donc un sous-groupe dense dans  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Comme ce sous-groupe est contenu dans  $G_\mu(E)$ , on en déduit que  $G_\mu(E)$  est dense dans  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . En particulier il est Zariski-dense. Le théorème 3.1 s'applique donc, ce qui prouve la séparation et la stricte positivité des exposants de Lyapounov.

Pour l'assertion sur l'absence de spectre absolument continu, on se réfère à la théorie de Kotani pour les opérateurs  $\mathbb{R}$ -ergodiques ([9], théorème 7.2). Comme ici,  $H_\omega^A$  est  $\mathbb{Z}$ -ergodique, et non  $\mathbb{R}$ -ergodique, on fait appel aux techniques de suspension de Kirsch dans [7] pour appliquer la théorie de Kotani aux opérateurs  $\mathbb{Z}$ -ergodiques.

#### REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier vivement Anne Boutet de Monvel et Günter Stolz pour leurs nombreux conseils et suggestions, et pour toute l'attention qu'ils ont portée à son travail.

#### RÉFÉRENCES

- [1] P. Bougerol, J. Lacroix, Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators, Progr. Probab. Statist., 8, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] H. Boumaza, G. Stolz, Positivity of Lyapunov exponents for Anderson-type models on two coupled strings, Electron. J. Differential Equations 2007 (2007), 47, 1–18, 2007.
- [3] E. Breuillard, T. Gelander, On dense free subgroups of Lie groups, J. Algebra, 261 (2003), no. 2, 448–467.
- [4] R. Carmona, J. Lacroix, Spectral Theory of Random Schrödinger Operators, Probability and Its Applications, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [5] D. Damanik, R. Sims, G. Stolz, Localization for one-dimensional, continuum, Bernoulli-Anderson models, Duke Mathematical Journal, 114 (2002), 59–99.
- [6] I.Ya. Gol'dsheid, G.A. Margulis, Lyapunov indices of a product of random matrices, Russian Math. Surveys, 44 (1989), no.5, 11–71.
- [7] W. Kirsch, On a class of Random Schrödinger Operators, Advances in Applied Mathematics, 6 (1985), p. 177–187
- [8] A. Klein, J. Lacroix, A. Speis, Localization for the Anderson model on a Strip with Singular Potentials, J. Func. Anal., 94 (1990), 135–155.
- [9] S. Kotani, B. Simon, Stochastic Schrödinger operators and Jacobi Matrices on the Strip, Commun. Math. Phys., 119 (1988), no. 3, 403–429.
- [10] W. Schmidt, Diophantine approximation, Lecture Notes in Mathematics, Vol.785, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [11] P. Stollmann, Caught by Disorder. Bound States in Random Media, Progress in Mathematical Physics, Vol. 20, Birkhäuser, 2001.

*E-mail address:* boumaza@math.jussieu.fr

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UNIVERSITÉ PARIS 7 DENIS DIDEROT, 2 PLACE JUSSIEU, 75251 PARIS, FRANCE